

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό Βιβλίο Σελ.76

A2.. Σχολικό Βιβλίο Σελ.104

A3. α) Ψευδής

β) Σχολικό Βιβλίο Σελ.136.

A4. α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $f:(1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}, x > 1$$

$$g(x) = e^x, D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x > 1\} = (0, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)+2}{g(x)-1} \Rightarrow (f \circ g)(x) = \frac{e^x+2}{e^x-1}$$

B2. $(f \circ g)(x) = \frac{e^x+2}{e^x-1}, x > 0$

Η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$(f \circ g)'(x) = \left(\frac{e^x+2}{e^x-1} \right)' = \frac{e^x \cdot (e^x-1) - (e^x+2) \cdot e^x}{(e^x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(x) = \frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-2e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x-1)^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Η $f \circ g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα 1-1, συνεπώς υπάρχει η αντίστροφη

$$(f \circ g)^{-1}(x)$$

$$D_{(f \circ g)^{-1}} = (f \circ g)(D_{f \circ g}) = (f \circ g)((0, +\infty)) \xleftrightarrow{f \circ g \text{ γν.φθίνουσα και συνεχής}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} (f \circ g)(x) \right) = (1, +\infty)$$

$$\text{Καθώς } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + 2)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\text{Και για } x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \text{ με}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$$

$$\text{Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης } (f \circ g)^{-1}(x) \text{ είναι } D_{(f \circ g)^{-1}} = (1, +\infty)$$

Για $x > 0$ και $y > 1$ θέτουμε:

$$y = (f \circ g)(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow y(e^x - 1) = e^x + 2 \Leftrightarrow ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ye^x - e^x = y + 2 \Leftrightarrow (y - 1)e^x = y + 2 \xrightarrow{y > 1 \text{ άρα } y \neq 1} e^x = \frac{y + 2}{y - 1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y + 2}{y - 1}\right)$$

$$\text{Άρα: } (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right) \quad x > 1.$$

$$\text{Β3. } \varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right) \text{ παραγωγίσιμη στο } (1, +\infty) \text{ με}$$

$$\varphi'(x) = \left(\ln\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right) \right)' = \frac{x - 1}{x + 2} \cdot \left(\frac{x + 2}{x - 1} \right)' = \frac{-3x + 3}{(x + 2)(x - 1)^2} < 0$$

για κάθε $x > 1$ άρα ή $\varphi(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

$$\text{Β4. Για } x > 1 \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right) \stackrel{u = \frac{x + 2}{x - 1}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right) \stackrel{u = \frac{x + 2}{x - 1}}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = \ln 1 = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma_1. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, \frac{3\pi}{2})$ άρα συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\text{Για } x < 0 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - \ln \lambda \right) = 1 - \ln \lambda \quad (1)$$

$$\text{Για } x > 0 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x) = 0 + \lambda \cdot 1 = \lambda \quad (2)$$

$$f(0) = 1 - \ln \lambda. \text{ Θα πρέπει: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \stackrel{(1),(2)}{\iff} 1 - \ln \lambda = \lambda \iff$$

$$\iff \ln \lambda + \lambda - 1 = 0, \lambda > 0.$$

$$\text{Θέτουμε: } g(\lambda) = \ln \lambda + \lambda - 1, \quad \lambda > 0$$

Η g παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα και συνεχής με $g(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$ προφανής ρίζα

$$\text{Είναι } g'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 1 > 0 \text{ για } \lambda > 0$$

Η g γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα και «1-1» άρα $\lambda = 1$ μοναδική

Γ₂. Για $\lambda = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Για $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(1-x)} = 1$$

Για $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 1 + 0 = 1$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \text{ συνεπώς: } f'(0) = 1$$

$$\lambda = \varepsilon \varphi \omega = f'(0) = 1 \iff \varepsilon \varphi \omega = 1 \iff \varepsilon \varphi \omega = \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} \iff \omega = \kappa \pi + \frac{\pi}{4} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Άρα: } \omega = \frac{\pi}{4}$$

$$\Gamma_3. \text{Για } x < 0 \text{ η } f \text{ παραγωγίσιμη με } f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = -\frac{(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Για $x = 0$ $f'(0) = 1$

Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

$$\text{Άρα, } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Για κάθε εσωτερικό σημείο του $(-\infty, \frac{3\pi}{2})$ ορίζεται η $f'(x)$, άρα αναζητούμε κρίσιμα σημεία όπου $f'(x) = 0$.

Για $x < 0$ είναι $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$, άρα δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία για $x < 0$.

Για $x = 0$ είναι $f'(0) = 1 \neq 0$.

Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ θέτουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 2\kappa\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} + x \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad (\text{αδυνατη})$$

Για $x < 0$ είναι $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$, άρα δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία για $x < 0$.

Για $x = 0$ είναι $f'(0) = 1 \neq 0$.

Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ θέτουμε

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}, x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\text{Είναι } 0 < x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < \kappa < \frac{5}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Άρα $\kappa = 0, \kappa = 1$. Για $\kappa = 0$ είναι $x_0 = \frac{\pi}{4}$ και για $\kappa = 1$, είναι $x_1 = \frac{5\pi}{4}$.

Επομένως τα κρίσιμα σημεία $A\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $A\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ και $B\left(\frac{5\pi}{4}, f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$, $B\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$

Γ4. Για $\alpha \leq 0$ η εξίσωση εφαπτομένης είναι $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$, Θέτουμε $y = 0$ για το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$. $-f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow \frac{-1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(x - \alpha) \Leftrightarrow -1 + \alpha = x - \alpha \Leftrightarrow x = 2\alpha - 1$

$$B(2\alpha - 1, 0)$$

$$x_B(t) = 2\alpha(t) - 1$$

$$x_B'(t) = 2\alpha'(t) = 2\left(-\frac{\alpha(t)}{3}\right) = -\frac{2\alpha(t)}{3}$$

Για $t = t_0$

$$x_B'(t_0) = -\frac{2\alpha(t_0)}{3} = -\frac{2(-1)}{3} = \frac{2}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = e^x + x^2 - e \cdot x - 1$

$$f'(x) = e^x + 2x - e$$

$$f''(x) = e^x + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

• $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα η f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

• Η f' συνεχής στο $[0, 1]$

$$\left. \begin{aligned} f'(0) &= e^0 + 2 \cdot 0 - e = 1 - e < 0 \\ f'(1) &= e^1 + 2 \cdot 1 - e = 2 > 0 \end{aligned} \right\} f'(0) \cdot f'(1) < 0$$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$: $f'(x_0) = 0$

$$\text{Για κάθε } x > x_0 \xrightarrow{f' \nearrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

$$\text{Για κάθε } x < x_0 \xrightarrow{f' \nearrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f'		$- \quad \circ$	$+$
f		$\searrow$	$\nearrow$

$$\text{Για κάθε } x > x_0 \xrightarrow{f \nearrow} f(x) > f(x_0)$$

$$\text{Για κάθε } x < x_0 \xrightarrow{f \searrow} f(x) > f(x_0)$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq f(x_0)$

Συνεπώς η f παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο το $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1$

$$\text{Όμως } f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0 \quad (1)$$

$$\text{Άρα } f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1 \stackrel{(1)}{=} e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = x_0^2 - (e+2) \cdot x_0 + e - 1$$

$$\Delta_2. \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{1}{x - x_0} \left[\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} + (x - x_0) \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right] \right\} =$$

Για $x > x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{x - x_0} = +\infty$$

Από Δ1 για $x > x_0$ η $f'(x_0) > 0$ σε μία περιοχή κοντά στο x_0 . Άρα $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = +\infty$

$$\text{Ξέρουμε ότι: } -1 \leq \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -(x - x_0) \leq (x - x_0) \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \leq (x - x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [-(x - x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x - x_0) = 0 \text{ άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[(x - x_0) \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right] = 0$$

Συνεπώς:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left\{ \frac{1}{x - x_0} \left[\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} + (x - x_0) \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right] \right\} = (+\infty)[(+\infty) + 0] = +\infty$$

Για $x < x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{x - x_0} = -\infty$$

Από Δ1 για $x < x_0$ η $f'(x_0) < 0$ σε μία περιοχή κοντά στο x_0 . Άρα $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = -\infty$

$$\text{Ξέρουμε ότι: } -1 \leq \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -(x - x_0) \geq (x - x_0) \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \geq (x - x_0)$$

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} [-(x - x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0^-} (x - x_0) = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[(x - x_0) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] = 0$$

Συνεπώς:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left\{ \frac{1}{x - x_0} \left[\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} + (x - x_0) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] \right\} = (-\infty)[(-\infty) + 0] = +\infty$$

$$\text{Συνεπώς: } \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{1}{x - x_0} \left[\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} + (x - x_0) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] \right\} = +\infty$$

Β τρόπος

Η $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$

$$-1 \leq \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \leq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \leq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + 1 = +\infty \text{ από Κ.Π:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right\} = +\infty$$

Δ3. Θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - x_0$ η g είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Ισχύει $g(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$, διότι $x_0 < 1$ και

$$g(x_0) = f(x_0) < 0 \text{ καθώς } f \text{ γνησίως αύξουσα στο } (x_0, +\infty)$$

$$\text{για } x_0 < 1 \Rightarrow f(x_0) < f(1) \Rightarrow f(x_0) < 0$$

Οπότε $g(1) \cdot g(x_0) < 0$, από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\rho \in (x_0, 1) \text{ τέτοιο ώστε } g(\rho) = 0.$$

$$\text{Είναι } g'(x) = (f(x) + x - x_0)' = f'(x) + 1 > 0 \text{ για κάθε } x \in (x_0, 1) \text{ [λόγω } \Delta 1]$$

άρα η g γνησίως αύξουσα στο $(x_0, 1)$ άρα 1-1 άρα η ρίζα μοναδική.

Δ4. Αν ρ η ρίζα του ερωτήματος Δ3 τότε ισχύει ότι: $f(\rho) = x_0 - \rho$

Θα δείξουμε ότι:

$$f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa) + 1) \Leftrightarrow f(x_0) > (x_0 - \rho)(f'(\kappa) + 1) \stackrel{\rho > x_0 \Leftrightarrow x_0 - \rho < 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x_0)}{(x_0 - \rho)} < (f'(\kappa) + 1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x_0)}{(x_0 - \rho)} - 1 < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - (x_0 - \rho)}{(x_0 - \rho)} < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{(x_0 - \rho)} < f'(\kappa)$$

Η f συνεχής στο $[x_0, \rho]$

Η f παραγωγίσιμη στο $[x_0, \rho]$

Από θεώρημα Μέσης Τιμής ξέρουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_0, \rho)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho}$$

Όμως $\xi \in (x_0, \rho)$ οπότε για κάθε $\kappa \in (\rho, 1)$ ισχύει ότι:

$$\xi < \kappa \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa)$$

